

УДК 539.3

Н.О. Костира, кандидат технічних наук

## МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ КОНСТРУКТИВНО-НЕОДНОРІДНИХ ТОНКИХ ОБОЛОНОК КОМБІНОВАНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

*Національний авіаційний університет, Україна*

***Запропонована методика визначення параметрів конструктивно-ортотропної оболонки з використанням рівнянь стану на основі узагальненого закону Гука для ортотропного однорідного матеріалу.***

**Постановка проблеми.** Технологія виготовлення елементів висячих оболонкових конструкцій зумовлює конструктивні особливості матеріалу загальної тонколистової оболонкової конструкції. Монтажні роботи при виготовленні великопрогонових оболонкових конструкцій покриттів за укладкою і подальшої автоматичною електрозваркою, у тому числі лазерною, окремих тонколистових елементів (товщина 3-4 мм) виконуються по раніше виготовленій конструкції, так званій, постелі оболонкової конструкції, як складової загальної тонколистової оболонки. Поверхня постелі визначає початкову поверхню самої оболонки, тому для її визначення розв'язується задача формоутворення і використовуються спеціальні пристрої натягу елементів конструкції постелі, яка складається з регулярних ниток скінченої жорсткості, напрям яких по довжині співпадає з твірними лініями лінійчатих поверхонь (наприклад, гіперболічний параболоїд). Конструкції ниток скінченої жорсткості виготовляють з прокатного металу – таврового, швелерного, кутового і полосового, а також їх комбінацій з використанням конструктивних схем перерізів відкритого і закритого профілю.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** При побудові дискретних моделей і розрахункових схем комбінованих оболонкових конструкцій з використанням площин симетрії розрахункового фрагменту не завжди вдається адекватно відобразити модель конструкції тонколистової оболонки з регулярно розміщеними в одному напрямку ребер – ниток скінченої жорсткості, крім того реалізація зазначеної адекватності пов'язана з різким збільшенням числа невідомих і, відповідно, числа розв'язуючих рівнянь, а останнє призводить до погіршення обумовленості матриці системи лінеаризованих рівнянь і, відповідно, до зниження ефективності, або взагалі недієздатності розробленого алгоритму розв'язку нелінійних розв'язуючих рівнянь.

Існує відома методологія створення композитних конструкцій з попередньо заданими анізотропними властивостями, тобто реалізуються відповідні вимоги до створення властивостей однорідних анізотропних матеріалів композитних систем. Конструктивно - ортотропні тонколистові оболонки є своєрідним аналогом створення подібних композитних систем [1].

Пружно-нелінійні властивості композитних, або анізотропно - конструктивних (умовних) матеріалів досліджуваних оболонкових конструкцій при наявності значних (великих) деформацій апроксимуються у процесі

еволюції деформації інтегральним законом стану [2] з використанням узагальненого закону Гука, розповсюдженого на область скінченних деформацій, для “еквівалентного” ортотропного матеріалу (прямолінійна або криволінійна ортотропія) [3, 4].

**Постановка задачі.** У зв’язку з вищенаведеним запропонована методика визначення параметрів модельної конструктивно-ортотропної оболонки з використанням рівнянь стану на основі узагальненого закону Гука для ортотропного однорідного матеріалу [5].

**Основна частина.** Розглянемо циклічну модель конструктивно-ортотропної моделі тонколистової оболонки з регулярно розташованими поздовжніми і поперечними ребрами, яка наведена на рис. 1.

Вихідні геометричні і фізико-механічні параметри оболонки з ребрами наступні:  $h_0, h_{r(l)}, h_{r(b)}, b_{r(l)}, b_{r(b)}, f_a, f_b, E, G, \nu$  (ізотропний матеріал). Матеріал конструктивно - ортотропної умовно гладкої моделі оболонки еквівалентної для розрахункового фрагменту (рис.1) має наступні геометричні і фізико-механічні параметри:  $h_{(e)}, l, b, E_1^{(e)}, E_2^{(e)}, E_3^{(e)}, G_{12}^{(e)}, G_{13}^{(e)}, G_{23}^{(e)}, \nu_{21}^{(e)}, \nu_{31}^{(e)}, \nu_{32}^{(e)}$  (дев’ять незалежних технічних констант, з використанням яких можна отримати рівняння стану ортотропного матеріалу).

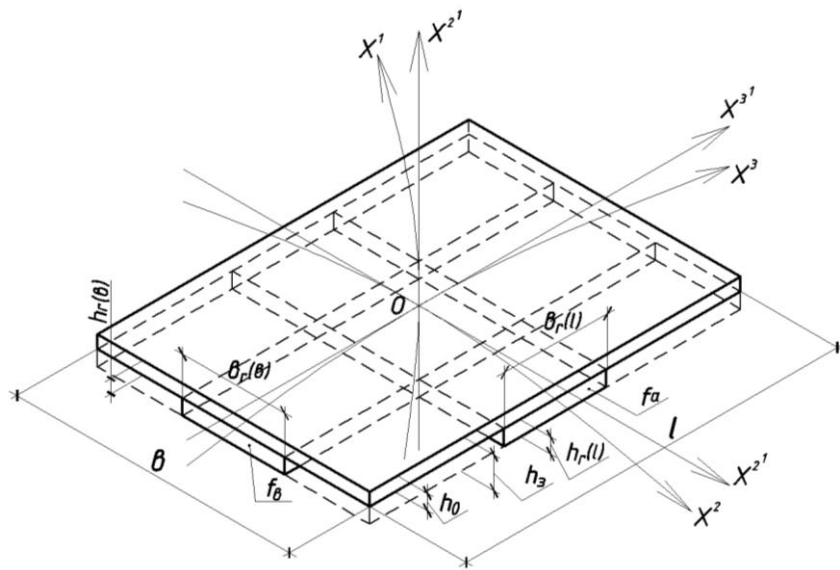


Рис. 1. Циклічна модель конструктивно-ортотропної оболонки

Параметри  $l, b$  незмінні для розрахункового циклічного фрагменту, а параметр  $h_{(e)}$  і фізико-механічні характеристики визначаються з використанням умов: еквівалентність (рівність) поздовжніх (циліндричних), зсувних і згинальних жорсткостей розрахункового фрагменту (рис.1) відносно осей базиса ортотропії  $OX^1 X^2 X^3$ ; термодинамічні обмеження:  $E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$ ;  $E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}$ ;  $E_2 \nu_{31} = E_1 \nu_{13}$ ;  $|\nu_{12}| < (E_2 / E_1)^{1/2}$ ;  $|\nu_{21}| < (E_1 / E_2)^{1/2}$ ;  $E_1, E_2, E_3, G_{12} > 0$ ;  $\nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31} < 0,5$ .

Враховуючи, що в розглянутих оболонкових системах привалюють мембранні напруження (до 90-95%), при побудові еквівалентних аналогів конструктивно-ортотропних моделей можна прийняти:

$$E_1^{(e)} \equiv E; \quad \nu_{21} = \nu_{31} \equiv \nu; \quad G_{12}^{(e)} = G_{13}^{(e)} = G. \quad (1)$$

З урахуванням (1) залишається п'ять незалежних невідомих геометричних параметрів і технічних констант конструктивно-ортотропної умовно-гладкої моделі тонколистової оболонки з ребрами:  $h_{(e)}, E_2^{(e)}, E_3^{(e)}, G_{32}^{(e)}, \nu_{32}^{(e)}$ . Для їх визначення складаємо п'ять рівнянь з вище зазначених умов:

$$E_2^{(e)} \cdot l \cdot h_{(e)} = EA_{(q)}^{(2)}; \quad E_3^{(e)} \cdot b \cdot h_{(e)} = EA_{(q)}^{(3)}; \quad E_2^{(e)} \frac{l \cdot h_{(e)}^3}{12} = EI_{(q)}^{(2)}; \\ E_3^{(e)} \frac{b \cdot h_{(e)}^3}{12} = EI_{(q)}^{(3)}; \quad G_{23}^{(e)} \cdot l \cdot b = G \cdot l \cdot b \quad (2)$$

$$\text{Розв'язуючи систему рівнянь (2) одержимо:} \quad E_2^{(e)} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{[EA_{(q)}^{(2)}]^3}{12EI_{(q)}^{(2)}}}; \quad (3)$$

$$E_3^{(e)} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{[EA_{(q)}^{(3)}]^3}{12EI_{(q)}^{(3)}}}; \quad G_{23}^{(e)} = G; \quad h_{(e)}^{2(3)} = \sqrt{\frac{12EI_{(q)}^{(2)(3)}}{EA_{(q)}^{(2)(3)}}}. \quad (4)$$

Приймаємо  $h_{(e)}^{(2)(3)\min} \leq h_{(e)}^{cp} < h_{(e)}^{(2)(3)\max}$  і з урахуванням  $h_{(e)}^{cp}$  виконуємо уточнення технічних констант, обчислених за (3), (4):  $E_{2(3)}^{(e)} = \frac{EA_{(q)}^{2(3)}}{l(b) \cdot h_{(e)}^{cp}}$ .

Незалежний коефіцієнт Пуассона  $\nu_{32}$  визначаємо із урахуванням умов:

$$E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}; \quad |\nu_{23}| < (E_3 / E_2)^{1/2}; \quad |\nu_{32}| < (E_2 / E_3)^{1/2}. \quad (5)$$

В формулах (1)-(5) використані наступні співвідношення (рис.1):

$$EA_{(q)}^{(2)} = E(f_a + h_0 l); \quad EA_{(q)}^{(3)} = E(f_b + h_0 b); \\ EI_{(q)}^{(2)} = \frac{E}{12} [l \cdot h_0^3 + b_{r(l)} \cdot h_{r(l)}^3 + 3f_a (h_0 + h_{r(l)})^2]; \\ EI_{(q)}^{(3)} = \frac{E}{12} [b \cdot h_0^3 + b_{r(b)} \cdot h_{r(b)}^3 + 3f_b (h_0 + h_{r(b)})^2]. \quad (6)$$

З використанням технічних констант конструктивно-ортотропної моделі тонколистової оболонки з ребрами отримуємо компоненти тензора пружностей

$$4\text{-го рангу } \hat{C}_4^{(e)}: \quad C^{ijkl} = \overset{0}{C}^{strp} \overset{*}{S}_s^i \overset{*}{S}_t^j \overset{*}{S}_r^k \overset{*}{S}_p^l; \quad \overset{*}{S}_s^i = \delta_s^i + \overset{0}{\nabla}_i \overset{*}{u}^k, \quad (7)$$

де  $\overset{*}{S}_s^i$  - компоненти афінного тензора перетворень вихідного початкового базису лагранжевої системи координат в базис актуальної конфігурації нелінійної дискретної моделі оболонки.

Компоненти  $\overset{0}{C}^{strp}$  обчислюються з використанням компонент тензора пружностей в ортонормованому базисі ортотропії:

$$C_{ijkl}^0 = \tilde{C}^{rstp} \tilde{S}_{.r}^0 \tilde{S}_{.s}^0 \tilde{S}_{.t}^0 \tilde{S}_{.p}^0 \sqrt{g^{(rr)} g^{(ss)} g^{(tt)} g^{(pp)}}, \quad (8)$$

$$\text{де } \tilde{S}_{.r}^0 = C_{j'}^i C_r^{j'}; \quad C_i^0 = \frac{\partial z^{j'}}{\partial x^i}; \quad C_{j'}^0 = \frac{\partial x^i}{\partial z^{j'}}; \quad C_i^{j'} = \frac{\partial z^{j'}}{\partial x^i}; \quad C_{j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^{j'}};$$

$\frac{\partial z^{j'}}{\partial x^i}; \frac{\partial x^i}{\partial z^{j'}}$  - компоненти тензорів афінного перетворення лагранжевої системи координат у глобальну декартову систему координат;  $C_{j'}^i$  - компоненти ортогонального перетворення глобальних декартових координат  $z^{j'}$  у декартовий базис криволінійної (в загальному плані) ортотропної системи координат  $x^i$ .

**Висновки.** На основі аналітичних співвідношень (1)-(8) і процедур моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) отримані співвідношення МСЕ для універсального просторового оболонкового скінченного елемента (СЕ) з 24-ма ступенями вільності, що відповідає чотирьом вузлам на серединній поверхні оболонки з шістьма узагальненими переміщеннями в кожному. Переміщення і координати точок у межах простору СЕ змінюються у відповідності з полілінійними апроксимуючими функціями місцевих лагранжевих координат  $x^1, x^2, x^3$ :

$$u^i = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} u_{S_1 S_2 S_3}^i \prod_{\delta=1}^3 \left( S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right), \quad (9)$$

де  $-\frac{1}{2} \leq x^{(\delta)} \leq \frac{1}{2}$ ;  $S_{(\delta)} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$  - умовні лагранжеві координати;  $u_{S_1 S_2 S_3}^i$  - вузлові переміщення СЕ.

## Література

1. *Тарнопольский Ю. М.* Инженерная механика композитов / Ю. М. Тарнопольский ; пер. с англ. Н. П. Жмудя, В. Л. Кулакова // Прикладная механика композитов : сб. статей 1986-1988 гг. – М.: Мир, 1989. – 358 с.
2. *Баженов В. А.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок / В. А. Баженов, В. К. Цихановський, В. М. Кислоокій. – Київ: КНУБА, 2000. – 386 с.
3. *Грин А.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс; пер. с англ. Ю. В. Немировского. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
4. *Клаф Р.* Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
5. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела: [учеб. пособие для вузов] / Юрий Николаевич Работнов. – [2-е изд., испр.]. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1988. – 712 с.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА  
КОНСТРУКТИВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК  
КОМБИНИРОВАННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Н.О. Костыра*

Предложена методика определения параметров конструктивно-ортотропной оболочки с использованием уравнений состояния на основе обобщенного закона Гука для ортотропного однородного материала.

**THE SIMULATION OF MATERIAL PHYSICAL CHARACTERISTIC  
STRUCTURAL-NON HOMOGENEOUS THIN SHELLS OF COMBINED  
MECHANICAL SYSTEMS**

*N.O. Kostyra*

The method of characteristic determination is offered for designing structural-non homogeneous thin shells of combined mechanical systems that based on the generalized Hooke's law for orthogonal oriented homogeneous material.